La axiomática

Aksiyumatikaa

Fabio A. Contreras Oré

Resumen

El presente artículo trata sobre la axiomática y su rol como método de estructuración de la Matemática, su importancia y sus limitaciones. La axiomática es un método de estructuración de la matemática, no es un método didáctico.

Palabras clave

Axiomática

Shuukukuna limana: Aksiyumatikaa

The Axiomatic

Abstract

The present article discusses the axiomatic and its role as a method of structuring of the Mathematics, their importance and their limitations. The axiomatic is a method of structuring of the mathematics, is not a method of teaching.

Keywords

Axiomatic.

A axiomática

Resumo

O presente artigo trata sobre a Axiomática e sua função como método de estruturação da matemática, sua importância e suas limitações. A axiomática é um método de estruturação da matemática, não é um método didático.

Palavras-chave:

axiomática

Recibido: 02 de septiembre de 2016 / Corregido: 02 de marzo de 2017 / Aprobado: 05 de mayo de 2017

* Peruano. Docente de Posgrado de la Universidad Nacional del Centro. Maestro en Educación, con mención en Didáctica Universitaria. Ex Director de Educación de la Región Junín. Correo: conofabi@hotmail.com

Introducción

En las siguientes líneas, procuraremos hacer un resumen sobre la "axiomática" y su rol en la comprensión de la naturaleza de la matemática.

Bertrand Russell (1910), filósofo, matemático y uno de los intelectuales más influyentes del siglo XX, alguna vez dijo en su ensayo *Mathematics and the metaphysicians*, citado por Newman (1956): "Las matemáticas podrían definirse como aquello en lo que nunca sabemos de lo que estamos hablando, ni si lo que decimos es verdad", refiriéndose a la concepción moderna de la matemática. Además, Karl Boyer afirma que: "Uno de los hallazgos culturales decisivos del siglo XIX fue el descubrimiento de que la matemática no es una ciencia natural, sino una creación intelectual del hombre en 1901 en el *International Montthly"*. (Boyer 2007, p 741). Sin embargo para llegar a esta conclusión, hubo necesidad de comprender el verdadero sentido de la axiomática y su influencia en el progreso de la ciencia.

Los matemáticos de la antigüedad siempre han estado convencidos de que demostraban "verdades" o "proposiciones verdaderas" relacionadas con una parte de la realidad, pero el progreso de la matemática después del nacimiento de las geometrías no euclidianas haría cambiar tal concepción, hoy se considera a las matemáticas como sistemas lógicos y no ciencias que tratan de objetos del mundo concreto; aunque las teorías, también tengan sus correspondientes interpretaciones semánticas y se puedan aplicar para la resolución de problemas del mundo físico.

El surgimiento del método axiomático se remonta a la época de los griegos, sin embargo los conocimientos matemáticos prácticos tienen una antigüedad mayor, remontándose, seguramente a los inicios de la historia de la humanidad.

Las culturas anteriores a los griegos tuvieron un conocimiento matemático importante y sus aplicaciones intervinieron en la construcción de la pirámides de Egipto y la muralla China, en el conocimiento de la Astronomía de los Babilonios, la elaboración del calendario Azteca, los grandes dibujos de las pampas de Nazca en el antiguo Perú, etc. (Boyer 2007; Stewart 2012; Bell 1995).

La gran diferencia entre los conocimientos griegos y los de otros pueblos, fundamentalmente radica en el hecho de que todas las culturas anteriores a los griegos tuvieron un conocimiento práctico para resolver problemas de sus entornos, pero los griegos organizaron tales conocimientos en una ciencia. Todos los conocimientos anteriores, fueron ordenados y sistematizados por los griegos en una Ciencia al que denominaron Geometría. Queda claro que las matemáticas prácticas y sus aplicaciones precedieron a la matemática axiomatizada.

> Desde el punto de vista de Platón, los objetos de la geometría poseen una realidad más alta que los del mundo sensible o, según Aristóteles, sólo tienen un ser *abstracto* en tanto que son objetos puros del pensamiento, por lo que resultaba un contrasentido aplicar la geometría al estudio de la naturaleza,... (Gallego-Badillo 1991, p.102).

Euclides, uno de los grandes geómetras de la antigüedad, vivió aproximadamente en el período comprendido entre el 330 y el 275 antes de nuestra era; es en éste período donde aparece el primer tratado de Geometría mediante el método axiomático donde se resume y organiza todo el conocimiento matemático anterior en trece volúmenes a los que le denominaron "*Stoikheia*" (*Elementos).*

> Él introduce los postulados, que son originalmente de carácter constructivo, un proceso, lo que se hace necesario cuando el conocimiento no trabaja con lo visible y formulable directamente en proposiciones que son ciertas de manera evidente, por lo que es indispensable agregarles unas reglas de construcción. (Gallego-Badillo 1991, p 106)

El quinto, el séptimo, el octavo, el noveno y el décimo están dedicados a la teoría de las proporciones y a la aritmética (expuestas en forma geométrica) y los demás libros son propiamente geométricos.

Desde un comienzo, la preocupación de los matemáticos se ha centrado sobre dos aspectos: a) la ciencia del espacio (o Geometría) y b) la ciencia del número (o Aritmética), que estudia a los números enteros y la proporción entre enteros, a la que ahora se denominan números racionales positivos).

En el quinto libro se encuentra un riguroso tratamiento de la teoría de proporciones, basados fundamentalmente en los trabajos de Eudoxo, con la finalidad de estudiar las cantidades, denominadas modernamente irracionales; por lo que, la sistematización de los diferentes sistemas numéricos logrados en el siglo XIX, tienen sus raíces en los Elementos (Beppo 2001).

Por muchos siglos, los Elementos y los conocimientos que ella encerraban fueron considerados como un modelo de construcción acabada y perfecta; mientras que las ciencias naturales sufrían profundas renovaciones y el campo filosófico se agitaba en interminables disputas, casi todas las ciencias admiraban el templo euclídeo, y muchos hombres de ciencia consideraron que el ideal de todas las ciencias sería el de construirse *more geométrico,* al decir de Ch. Peirce (1839-1914).

Según Aristóteles, citado por J. Piaget y E.W.Beth (1980), la metodología de las ciencias demostrativas o deductivas, como entendían a la Geometría los griegos, se caracteriza por tres postulados: a) el postulado de la deductividad, b) el de evidencia, y c) el de realidad.

1) Según el *postulado de la deductividad*, toda ciencia demostrativa C, se basa sobre cierto número de principios, entre los cuales cabe distinguir los conceptos y las verdades primitivas (o axiomas). Todo concepto no primitivo perteneciente a C debe ser definido por medio de conceptos primitivos y toda verdad no primitiva incluida en C, debe ser demostrada a partir de los axiomas valiéndose de un razonamiento lógico.

2) Según el *postulado de evidencia*, los conceptos primitivos de C han de presentar tal grado de claridad que sea posible comprenderlos sin que necesitemos definición alguna; e igualmente, los axiomas de C han de presentar un grado tal de evidencia que nos sea posible aceptarlos como verdaderos sin necesidad de demostración.

3) Según el *postulado de realidad*, es preciso que los conceptos y las verdades de C se refieren a cierto campo de entidades reales, que constituirá precisamente, el objeto propio de la ciencia C. (Piaget y Beth 1980, p. 47)

Con estas consideraciones los trece libros de los Elementos de Euclides de Alejandría se procedió a la reorganización de toda la Ciencia Geometría conocida y a la elaboración de los nuevos conocimientos, bajo la influencia del reduccionismo atomístico de los físicos, Euclides realizó el reduccionismo en la Geometría, en dos planos el ontológico y el lógico:

> Y bien: la geometría euclídea hace uso del reduccionismo atomista en dos planos diferentes, que es necesario distinguir con cuidado: el plano ontológico, o de los entes, y el plano lógico, o el del encadenamiento de proposiciones.
>
> En el plano ontológico, los geómetras griegos buscaron como punto de partida los entes más simples, como habían hecho los físicos milesios antes de explicar la estructura del mundo y así colocaron en la base del edificio geométrico los conceptos de punto, línea y superificie. (Bosch 1971, pp. 18-19)

Luego añade, que en el plano lógico, el reduccionismo atomístico plantea:
1) el conocimiento de ciertas proporciones simples y básicas, llamadas *postulados o axiomas,* y
2) el buen uso de las reglas de deducción lógica (Bosch 1971, pp. 18-19).

Se dice que fue el propio Euclides quién dudaba de la selección de los axiomas que él había considerado en su Elementos; pues, si bien los cuatro primeros axiomas cumplían con el ideal de Aristóteles o del reduccionismo atomístico, la redacción y el contenido del quinto no gozaba ni de simplicidad ni de evidencia. Y Euclides, restringió su uso, hasta donde le fue posible.

Algunas fallas de los "Elementos" de Euclides fueron observados por los científicos de la antigüedad, en particular Arquímedes (287-212 a.C), quién amplió la lista de los postulados geométricos de Euclides y completó la exposición de su predecesor sobretodo en la teoría de la medición de longitudes, áreas y volúmenes

Pocos son los matemáticos que consideran que se debería completar los postulados de Euclides, por el contrario, la mayoría se inclinó por la reducción del número de postulados. Sin embargo, desde la misma época de los griegos, mucho fueron los matemáticos que trataron de demostrar que el quinto axioma de Euclides no era tal, y que podía ser deducida de los cuatro restantes. Sin embargo todo intento fracasó.

Entre los renombrados matemáticos de los siglos XVII, XVIII y XIX que se ocuparon de estos temas tenemos a J. Wallis (1616-1733), J.H.Lambert (1728-1777) y A.M.Legendre (1752-1833); quienes continuaron buscando la demostración o deducción del V postulado de los cuatro restantes.

Inclusive, Gerolano Saccheri (1667-1733), quien escribió su *Euclides ab omni naevo vindicatus,* con la intención de reivindicar a Euclides, fue el primero en tomar una dirección distinta a los demás, pues, él sustituyó el V axioma por su negación con la esperanza de encontrar alguna contradicción. En efecto, en sus investigaciones llegó a demostrar algunas proposiciones que contradecían a la experiencia, y G. Saccheri, consideró que esa era la prueba de que Euclides tenía razón en la proposición del V postulado; su ortodoxia; y su falta de comprensión sobre la verdadera naturaleza del método axiomático no le permitió ser el primer geómetra no euclidiano (Boyer 2007; Stewart 2012; Bell 1995).

En la Universidad de Kazán, Nikolai Ivánovich Lobachevski (1793-1856), al hacer lo mismo que el citado G. Saccheri, llega a otra conclusión novedosa: el V postulado no puede ser deducido de los restantes postulados de la geometría. Él no considera que sus teoremas son contradictorios con la realidad, sino que se ha construido un sistema lógico cuyas proposiciones son consecuencias de las premisas aceptadas. Esta concepción es una revolución en la matemática y en la comprensión de la naturaleza del método axiomático.

Horizonte de la Ciencia 7 (12) Julio 2017 FE/UNCP. ISSN (Impreso): 2304-4330/ ISSN (En Línea): 2413-936X
Contreras, F. La axiomática. 111-121.

Así pues, del análisis lógico del V axioma de la geometría de Euclides se pasó a un período de crisis del pensamiento y luego a un desarrollo en una nueva dirección, la comprensión de que la geometría no es una ciencia del espacio habitual, tal y como consideraban los griegos, sino un sistema lógico y cuyas verdades son consecuencias de los axiomas aceptados.

Sin embargo, si queremos hablar de justicia, también el Húngaro János Bolyai (1802-1860), hijo de otro no menos famoso matemático Wolfang Bolyai; el físico matemático alemán Karl Friederich Gauss (1777-1855), y su discípulo George Fidrerich Bernhard Riemann (1826-1866), a su turno, participaron de la revolución que ocasionó la comprensión de la verdadera naturaleza de la geometría y del rol del método axiomático.

La axiomatización definitiva de la geometría elemental lo realizó David Hilbert (1862-1943), en el año de 1899 en sus *Grundlangen der geometrie,* aunque este trabajo tuvo sus antecedentes en *los elementos de* Adrian Marien Legendre (1752-1833), que es una axiomatización, pero con intensión para su enseñanza en la secundaria, por tanto, se considera una axiomatización con intención didáctica. La obra Hilbert, muestra la profunda revolución que había sufrido la axiomatización, ahora ya era claro para los matemáticos que la axiomatización de la geometría era simplemente un sistema lógico deductivo y no ciencia descriptiva del espacio.

Por otro lado, también habían creado matemáticas en las que poco fueron comprendiendo el concepto de número real, sin embargo se comenzó a dudar de su existencia y de sus operaciones, por ésta razón y basándose en las nuevas ideas; Karl Théodor Wilhelm (1815-1897), Richard Julius Wilhenrn (1813-1916), Leopold Kroneckaer (1823-1891), Gottlob Frege (1848-1925), Guisseppe Peano (1858-1932), George Ferdinand Ludwing Philipp Cantor (1845-1918), Bertrand Russell (1872-1970), Alfred North Whitehead (1885-1955), Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), han efectuado importantes trabajos de axiomatización de la teoría de los sistemas numéricos (en Boyer 2007; Stewart 2012; Bell 1995).

Kurt Godel (1906-1978) y Paúl Cohen (1934-2007), han hecho importantes descubrimientos en matemática y se ha puesto de manifiesto varias y serias limitaciones de la axiomatización.

¿QUÉ ES LA AXIOMATIZACIÓN?

> El método axiomático consiste sencillamente en coleccionar todos aquellos conceptos básicos así como, todos aquellos hechos básicos a partir de los cuales se han de derivar por definición y deducción respectivamente todos los conceptos y teoremas de una ciencia. (Weyl 1965)

De la definición anterior, que corresponde a Husserl y de lo que ya anteriormente se ha expresado de acuerdo con Aristóteles, una ciencia que está axiomatizada posee dos procesos distintos pero complementarios: a) La conceptualización, y b) La demostración.

La *conceptualización* es el proceso mediante el cual a partir de los denominados conceptos primitivos o conceptos que no se pueden definir en términos más simples, todo los demás conceptos de la teoría en cuestión se definen en términos de los primitivos. Lógicamente, todo concepto nominal explícito que no es primitivo, puede ser eliminado en la teoría y ser sustituido por una cadena más grande de términos mediante los términos primitivos. Por ejemplo, aceptado el concepto de número natural que es un concepto primitivo en la axiomática de G. Peano, surge una nueva clase de números que se caracterizan por tener sólo dos divisores diferentes, a los que se les denomina números primos, y de estos, por caracterizaciones particulares surgen los conceptos de primos relativos, números cuasiprimos, números primos de Carmichael y los números primos de Sophie Germain. Todos estos conceptos no primitivos pueden ser eliminados en la teoría y ser sustituido por una cadena más grande de términos mediante los términos primitivos.

En cambio la *demostración* se refiere al proceso de validación de las proposiciones de la teoría, la misma que puede ser deducida del conjunto de axiomas explícitos en la teoría mediante reglas de formación y reglas de transformación. Toda proposición demostrable, se llama un teorema, y las proposiciones que sirven de punto de partida a la teoría se denominan axiomas. Una teoría es un conjunto de enunciados verdaderos o tenidos por tales; relativos a un determinado campo de problemas. Tal vez, por esta razón, al finalizar un teorema se anota Lqqd (Lo que se quería demostrar), para consignar que lo que se ha logrado es una demostración lógica de la proposición y que su verdad depende sólo de los axiomas aceptados y no de su confrontación con la realidad física.

Axiomatizar una teoría es entonces, organizar un conjunto de enunciados de tal forma, que partiendo de algunos de sus miembros, los llamados axiomas, y mediante la aplicación de las referidas reglas de formación y reglas de transformación, se puede derivar todas las restantes.

CLASES DE AXIOMÁTICA

Para Alberto Dou (1970), existen dos tipos de axiomáticas, a las que denominan *axiomática material y axiomática formal* respectivamente.

Axiomatización material

Tal como ya se ha descrito anteriormente, cuando los griegos axiomatizaron la Geometría, ellos consideraron que estaban axiomatizando una ciencia del espacio, es decir, una ciencia que estudiaba una parte de la realidad. Por tanto, nadie dudaba de la evidencia de sus axiomas, porque eran descripción de un mundo que les era familiar.

Una axiomática material, es pues, una axiomática cuyos axiomas y sus consecuencias tienen contenido y sentido, porque se refieren a una parte de la realidad.

Axiomatización formal

Desde David Hilbert, en contraposición a la axiomatización material, para poder aplicar las reglas de formación y las reglas de transformación con la rigurosidad necesaria, los axiomas y sus consecuencias los teoremas, no deben tener contenido, sino simplemente, símbolos y reglas formales de deducción.

Por tanto, en un sistema axiomático formal, los elementos primitivos (símbolos o términos o piezas) carecen absolutamente de contenido esencial explícito y son las piezas de un puro juego sin sentido material en sí mismo, y cuyo manejo o único sentido formal viene definido implícitamente por las reglas del juego constituidas por los axiomas y reglas de inferencias.

Consecuentemente, en un sistema axiomático formal, tanto los axiomas como los teoremas, en realidad, son esqueletos de derivación lógica, que pueden ser rellenados por variables; y carecen evidentemente de sentido de verdad o falsedad. Parece que Russell, se refiere a esta concepción como Matemática.

Por tanto, en un sistema axiomático formal, los objetos reciben existencia precisamente de la formulación y constitución del sistema.

Cuando se hace una derivación en un sistema axiomático formal, los teoremas son consecuencia exclusiva de los axiomas y de las reglas de inferencia. Sin embargo, si alguien sustituye las variables pos constantes convenientemente seleccionadas, las consecuencias de la teoría formal tendrán un equivalente en su interpretación o teoría formal tendrán un equivalente en su interpretación o *teoría semántica*. Además es posible, que con el mismo esqueleto deductivo, existan varios conjuntos de constantes que permiten interpretar la teoría.

En este caso si S es un conjunto de constantes que interpretan a la Teoría formal C, y T es otro conjunto de constantes que también interpretan la Teoría formal C, entonces las parejas ordenadas (C,S) y (C,T) son insomorfas, o teorías equivalentes módulo la Teoría formal C. En este caso, se dice que la teoría formal C, es un *modelo abstracto,* en cambio, las teorías (C,S) y (C,T) son *dos interpretaciones semánticas* del modelo (Guerrero Pino, 2010).

PROPIEDADES DE UN SISTEMA AXIOMÁTICO

Como quiera que en un sistema axiomático formal no se puede hablar de verdad o falsedad de la teoría, porque carece de contenido, una teoría tiene que tener algunas propiedades, para ser consideradas aceptables y ellas son:

***Consistencia*:** Se dice que un sistema axiomático es consistente, si es no posible que dentro de la teoría puedan ser deducibles a la vez una proposición p y su correspondiente negación $\sim p$. Es imposible $p \land \sim p$

Pues, en una teoría donde se pueda deducir que una proposición es verdadera y también falsa, entonces la lógica demuestra que cualquier proposición es también deducible, consecuentemente en una teoría *no consistente* porque toda proposición tiene demostración.

Asimismo, entonces, en *metamatemática o teoría de la demostración,* se demuestra que un sistema deductivo es consistente, si se encuentra alguna proposición que no tenga demostración dentro del sistema. Algunos matemáticos llegaron a pensar que el Teorema de Fermat-Wiles sería una proposición indemostrable, y que entonces se habría encontrado una prueba de que la aritmética es consistente o no contradictoria. (ver Contreras 2015).

El ya citado Kurt Godel, ha demostrado, que tampoco es solución el agregar un nuevo axioma para demostrar las proposiciones indemostrables en el sistema. Es decir, el añadir más axiomas no soluciona el problema.

Conviene decir, que existen dos tipos de consistencia: La consistencia absoluta y la consistencia relativa.

Existen dos métodos para demostrar la no contradicción relativa de un sistema axiomático, el método de interpretación, que consiste en reducir los teoremas X de una teoría T, a teoremas X´ de otra T´ mediante una definición de conceptos primitivos de T en base a la terminología de la teoría T´; si es posible tal interpretación, entonces la teoría T' es consistente o no contradicción de T.

Así, resulta que de la no contradicción de la teoría de números reales, se infiere que la Geometría de 3 ó 4 dimensiones, tampoco es contradictoria; asimismo, como la teoría de números reales se deriva de la teoría de números naturales, resulta que si la teoría de números naturales es no contradictoria entonces la teoría de números reales es no contradictoria. Finalmente la Geometría es no contradictoria, si no lo es la teoría de números naturales.

La no contradicción de la teoría de los números naturales depende de la no contradicción de la teoría de conjuntos, y ésta de la consistencia de la lógica formal.

El segundo método es el *de los números de Godel,* consiste en: asociar a cada fórmula X de la teoría T un número natural g(X) al que se denomina *número de Godel, y* suponiendo que para dos fórmulas $X \neq Y$ de la teoría T en la metateoría MT le corresponde dos números de Godel también distintos, es decir $g(X) \neq g(Y)$, entonces a cada propiedad P de la metateoría MT de ciertas fórmulas X,Y,Z de la teoría T, le corresponderá cierta propiedad P´ de la aritmética de sus correspondientes números de Godel, y a cada relación R entre fórmulas X o Y de números de Godel le corresponderá una relación R´, así se llega a una reducción de la Metateoría MT a la Aritmética.

En cambio respecto a la *consistencia absoluta* los resultados han sido desalentadores. Hasta ahora no se ha podido conseguir métodos para demostrar la consistencia absoluta de una teoría. Los logros se han conseguido en la dirección de la *consistencia relativa.*

Independencia. Se dice que un sistema es independiente, si un axioma de la teoría no puede ser deducida del resto de axiomas. Así los trabajos de Boylai, Lobachesvski, Riemann y Gauss, respecto al V axioma de Euclides y que dieron origen, posteriormente a las Geometrías no euclidianas, han demostrado precisamente, que el V axioma, no se puede deducir de los restantes, de ésta manera el V postulado es independiente.

Godel demostró en 1936 que dentro de un riguroso estudio de la teoría de conjuntos, sería imposible establecer la verdad o falsedad de la *hipótesis del continuo.*

La hipótesis del continuo postula que entre el cardinal del infinito numerable y el cardinal del infinito continuo no existe otro cardinal infinito, es decir $\aleph_0 < \aleph_1$ y consecuentemente por la hipótesis generalizada del continuo $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

En 1963 el entonces joven matemático californiano Paúl Cohen (1934-2007) demostró la indecibilidad de la hipótesis del continuo, también encontró que el conjunto con cardinal $2^{\aleph_0}$ parecía mucho más rico que cualquier otro de los conjuntos con cardinales alephs $\aleph_1$, $\aleph_2$,$\aleph_3$,$\aleph_4$ ... etc. Los cuales se construían de una manera absolutamente diferente.

Así pues, si la teoría de conjuntos de Zermelo-Frankel es no contradictoria, se puede añadir a su conjunto de axiomas la hipótesis del continuo o su negación, es decir tal axioma es independiente del sistema.

Todavía no se ha encontrado una aplicación a ésta teoría, sin embargo, ha permitido comprender mejor la estructura de los sistemas deductivos axiomáticos. El desarrollo de una teoría con la negación de la hipótesis del continuo podría llamarse, *teoría de conjuntos no Zermelo-Fraenkeliano,* de acuerdo con la costumbre.

Categoría o Completud: Se dice que un sistema axiomático es categórico o completo si en el sistema se encuentra todos los axiomas y nada más que ellos, por tanto toda otra proposición del sistema debe ser deducible de los axiomas, es decir, es lo opuesto a la propiedad de consistencia.

La teoría de la demostración, ha demostrado que este anhelo es irrealizable, pues, si en una teoría se encuentran todos los axiomas necesarios, entonces toda proposición sería demostrable, en consecuencia el sistema sería inconsistente; pero por otra parte, si el sistema es consistente, entonces, en el sistema deben encontrarse proposiciones que no tengan demostración, es decir, son incompletos.

Así pues, parece que la consistencia y la categoría no son compatibles en un sistema.

Además el mismo Godel, ha demostrado que no era posible decidir sobra la verdad o falsedad de algunos enunciados de la Aritmética, para decidirlos hay que recurrir a conceptos y teoremas fuera del sistema lógico de la Aritmética, por tanto, la Aritmética, y la Matemática son *incompletas*. Este teorema de la incompletitud de las matemáticas ha dado un golpe duro a los fundamentos de la matemática.

EJEMPLO DE UN SISTEMA AXIOMÁTICO

En 1889 Guisseppe Peano, siguiendo a lo realizado por Euclides en la Geometría, y sin necesidad de plantearse si existen o no los números naturales, propuso un sistema axiomático utilizando tres conceptos primitivos: "número", "cero" y "sucesor", cuyas propiedades o axiomas son los siguientes: (Boyer 2007; Stewart 2012)

1. Cero es un número,
2. Si *n* es un número, entonces el sucesor de *n* también es otro número,
3. Cero no es sucesor de ningún número,
4. Si los sucesores de dos números son iguales, entonces los números mismos son iguales.
5. Si un conjunto de números *S* contiene al cero y también al sucesor de cualquier número que pertenezca a *S,* entonces todo número pertenece a *S*.

Este último axioma llamado *axioma de inducción,* que se convierte en una herramienta muy útil para las demostraciones y definiciones recursivas, además se convierte en una forma elegante de introducir el concepto de *infinito potencial*, que se complementa con el *infinito actual* para las demostraciones de la cardinalidad de los *números transfinitos* de G.Cantor.

El infinito potencial, se refiere a aquello que siendo actualmente finito puede aumentar sin límite, (este es el caso de gran cantidad de ejemplos en el cálculo diferencial), en cambio el infinito actual se refiere a una "toma de conciencia" de todos los elementos de un conjunto infinito a la vez: por ejemplo, el conjunto de los Números naturales es infinito (Bouvier & George 1974, p. 393).

El V axioma de G.Peano tiene muy poco de evidente, pues, esa condición era exigible en las pimeras axiomatizaciones, fundamentalmente en la concepción griega, sin embargo hoy, *axiomatizar* una teoría, no es sino organizar un conjunto de enunciados de tal forma que partiendo de algunos de sus miembros, llamados *axiomas* y mediante la aplicación de una serie de reglas de transformación se pueden derivar los *restantes,* estas proposiciones derivadas o demostradas se denominan *teoremas*. Axiomas y teoremas son expresiones de un cálculo, fórmulas redactadas en un lenguaje que expresa o facilita el cálculo.

Así, toda la lógica formal, puede ser derivada del conjunto de axiomas que aquí se ha explicitado y es la que corresponde a la axiomatización de Russell y Whitehead, expresados en los *Principios Matemática*.

Conclusiones

La axiomatización es un proceso posterior al conocimiento sensorial de los entes que se axiomatizan. La axiomática es una manera de hacer la presentación final de una teoría.

La axiomática no es un método didáctico sino de estructuración de la propia matemática. Sin embargo, axiomatizar o hacer un sistema axiomático podría ser una actividad muy productiva para estudiantes avanzados.

El método axiomático ha evolucionado, desde la concepción griega de axiomática material o ciencia que describe una parte de la realidad, a la concepción actual de axiomática formal o sistema lógico deductivo, cuyos teoremas dependen exclusivamente de los axiomas y de las leyes lógicas, independientemente de su contenido.

Tampoco, hoy es importante la exigencia del principio de evidencia que era una característica de la Ciencia deductiva griega, hoy se considera que un axioma, es simplemente una proposición, base de la teoría y que no se demuestra en la teoría, pudiendo ser deducible, es decir teoremas, en otro sistema deductivo.

El método axiomático, plantea serios problemas a la metamatemática o teoría de la demostración, pues, aún no se ha podido encontrar métodos que demuestren la consistencia absoluta de una teoría axiomática, pero se han logrado importantes avances en lo que se refiere a la consistencia relativa.

El problema del V postulado de Euclides y su estudio de independencia del sistema ha dado origen a las Geometrías no Euclidianas, y a otras ramas de la matemática, tales como una Geometría no arquimedianas, las teorías de conjuntos no cantorianos, etc. Todas estas ramas, son sistemas lógicos y no descripciones de una parte de la realidad, aunque no se desestima, que puedan ser útiles al hombre, en algún momento.

A pesar de las limitaciones del método axiomático, nadie puede dudar de la importancia que tiene en el desarrollo del pensamiento humano. Hoy existen importantes partes de la Física que se han axiomatizado, también se ha axiomatizado algunas partes de la Lingüística y de la Sociología, y se están haciendo serios esfuerzos para axiomatizar algunos otros campos del saber humano, es decir, la axiomatización material está triunfando sobre la axiomatización formal que por el momento está reservado o limitado a la lógica y a la matemática.

Referencias bibliográficas y electrónicas

Bell, E.T. (1995). *Historia de las Matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica.

Beppo, L. (2001). *Leyendo a Euclides.* Buenos Aires, Argentina: Libros del zorzal.

Boyer, C.B. (2007). *Historia de la matemática.* (1ra. Edición en español. 3ra. Reimpresión). España: Alianza Editorial.

Bouvier, A. y George, M. (1974). *Dictionnaire des mathématiques.* Paris: Presses universitaires de France.

Bosch, J. (1971). *¿Qué es la matemática?*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Columba. Colección esquemas N° 109.

Contreras, F. (2015) El último teorema de Fermat-Wiles. *Horizonte de la Ciencia* 5 (9): 211-218. ISSN (Impreso): 2304-4330/ ISSN (En Línea): 2413-936X

Dou, A. (1974). *Fundamentos de la matemática*. Barcelona, España: Editorial Labor S.A.

Frege, Gottlob. (1972). *Fundamentos de la aritmética*. Barcelona, España: Editorial Laía.

Gallego-Badillo, R. (1991). *Discurso sobre constructivismo.* Colombia: Editorial Mesa Redonda Magisterio.

Guerrero Pino (2010). La noción de modelo en el enfoque semántico de las teorías. *Praxis Filosófica* 31(julio-diciembre): 169-185. Universidad del Valle Cali, Colombia. Disponible en http://www.redalyc.org/pdf/2090/209020106012.pdf

Newman, J.R. (1956). Mathematics and the metaphysicians. Volumen 3. 1576-1590. Disponible en http://www.unz.org/Pub/NewmanJames-1957v03-01576

Piaget, J. y Beth, E.W. (1980). *Epistemología matemática y psicológica*. Barcelona, España: Editorial Grijalbo.

Russell, B. (1973). *Obras completas II, Ciencia y Filosofía*. España: Editorial Aguilar.

Stewart, I. (2012). *Historia de las matemáticas.* Barcelona. España: Crítica.