HORIZONTE DE LA CIENCIA
DOI: 10.26490/uncp.horizonteciencia.2022.22.1084

Soluciones Extrañas en Ecuaciones con Radicales de Índice 2

Manalisiśha huluykuna ikuwasiyunkunaćhu radikalkuna 2 indiciwan

Ayoyeteri te añapinte ora ecuacioneski radicales ora índice 2

Obetsikagetanëma ora kantagetagantsi katingasati ora jikotiro 2

Recepción: 24 octubre 2021 Corregido: 27 junio 2021 Aprobación: 01 julio 2021

Ronald Edwin Vaca Rosado
Nacionalidad: peruana
Filiación: Universidad Nacional Ciro Alegría
Correo: rvaca@unca.edu.pe
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4551-9696

Resumen

Las Soluciones Extrañas aparecen por un procedimiento incorrecto en la solución de ecuaciones que involucran radicales de índice par, debido al proceso de transposición didáctica. Se usó la forma tradicional de solucionar estas ecuaciones, la cual es incorrecta y lleva a la aparición de soluciones extrañas, teniéndose muchas veces que realizar una comprobación de las soluciones en la ecuación original para ver si hay o no una solución extraña; sin embargo, al usar los respectivos teoremas no se evidencia la aparición de soluciones extrañas y, por tanto, no hay necesidad de comprobación de las soluciones en la ecuación original.

Palabras Claves: Soluciones extrañas, Forma tradicional, Transposición didáctica

Lisichiku limaykuna: manalisiśha huluykuna, imaypis kakaa, manalisiśha yaćhachi.

***Ñantsi* iroperori:** ayoyeteri te añapinte, forma tradicional, transposición didáctica.

Nibarintsitsapage agatingatagetiro: Obetsikanëma kaninasati, okanta jirai, okantagetanaa yamëkagite.

Datos del autor

Ronald Edwin Vaca Rosado es docente Licenciado en Matemáticas por la Universidad Nacional de Trujillo. Maestro en Ciencias de la Educación con Mención en Investigación y Docencia por la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

Soluções estranhas em equações com radicais de índice 2

Resumo

Soluções estranhas aparecem por um procedimento incorreto na solução de equações envolvendo até mesmo radicais de índice, devido ao processo de transposição didática. Foi utilizada a forma tradicional de resolver essas equações, que é incorreta e leva ao aparecimento de soluções estranhas, tendo muitas vezes que fazer uma verificação das soluções na equação original para ver se existe ou não uma solução estranha; porém, ao usar os respectivos teoremas, o aparecimento de soluções estranhas não é evidente e, portanto, não há necessidade de verificar as soluções na equação original.

Palavras-chave: Soluções estranhas, Forma tradicional, Transposição didática.

Strange Solutions in Equations With Radicals of Index 2

Abstract

Strange solutions appear by an incorrect procedure in the solution of equations involving even index radicals, due to the didactic transposition process. The traditional way of solving these equations was used, which is incorrect and leads to the appearance of strange solutions, it has many times to perform a check of the solutions in the original equation to see whether or not there is a strange solution; however, when using the respective theorems, do not appear evidences of strange solutions, therefore, there is no need to verify the solutions in the original equation.

Keywords: Strange solutions, Traditional form, Didactic transposition

Introducción

Las Soluciones Extrañas, llamadas también soluciones espurias o soluciones ajenas, se presentan cuando se trata de solucionar Ecuaciones que involucran radicales de índice par, posiblemente debido al proceso que conlleva el uso de La Transposición Didáctica (Chevallard,1998).Estas ecuaciones, están presentes en fenómenos físicos tales como: Ley de Torricelli: "La velocidad de salida de un flujo de un depósito depende de la diferencia de elevación entre la superficie libre del fluido y la salida del fluido $v=\sqrt{2gh}$ ".

Teoría de Vibraciones: "En un sistema masa-resorte, bajo ciertas restricciones, se define la frecuencia natural del sistema como: $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$ ". En nuestro caso estudiaremos ecuaciones con radicales de índice 2, estas serán resueltas usando la forma tradicional "Muchos libros de pre álgebra o pre cálculo tienen un ítem dedicado a la resolución de ecuaciones irracionales... Generalmente explican las técnicas de resolución de dichas ecuaciones transformándolas en ecuaciones algebraicas, no justifican ni explican el porqué de las técnicas empleadas..." Pérez Nélida (2012). La forma tradicional es usada en virtud de la transposición didáctica, y siempre necesita la comprobación de dichas soluciones en la ecuación original, con el fin de descartar las soluciones extrañas; estas mismas ecuaciones serán resueltas usando los teoremas respectivos para cada tipo de ecuación llegándose a concluir que el uso de los teoremas no permiten la aparición de estas "Soluciones Extrañas" y que no hay la necesidad de comprobación de la solución en la ecuación original debido a que nos proporcionan universos en los cuales se garantiza la existencia de soluciones de la ecuación, por lo cual debemos tener en claro que la forma tradicional es una forma incorrecta de la transposición didáctica y que se viene usando para la resolución de ecuaciones con radicales de índice 2. Por tanto, es necesario difundir el uso de los teoremas establecidos para cada tipo de ecuación y así no tener que usar métodos incorrectos los cuales surgen en el proceso de transposición didáctica, como también lo dice Vidal Cortés (2009) "...un análisis de los libros de texto de mayor uso en Chile entre 1969 y 2009, respecto del tratamiento del álgebra de radicales, contenido que presenta rupturas del saber matemático con el saber escolar".

Métodos y Materiales

Resolver la ecuación: $\sqrt{x}=x-6$

Sol.

Método o Forma tradicional

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(x-6\right)^2$$

$$x=x^2-12x+36$$

$$x^2-13x+36=0$$

$$(x-9)(x-4)=0\longrightarrow x_1=9 \;\; y \;\; x_2=4$$

Comprobación:

$$x_1=9 \;\to \sqrt{9}=9-6 \;\to 3=3 \qquad \therefore x_1=9 \text{ es solución}$$

$$x_2=4 \;\to \sqrt{4}=4-6 \;\to 2=-2\ (absurdo) \qquad \therefore x_2=4 \text{ no es solución}$$

Método basado en el teorema: $\sqrt{a} = b \ \leftrightarrow b \geq 0 \ \wedge \ a = b^2$

$$\sqrt{x} = x - 6 \quad \rightarrow \ x - 6 \geq 0 \ \wedge \ x = (x-6)^2$$

$$x - 6 \geq 0 \ \rightarrow \ x \geq 6 \ \rightarrow \ U = [6, \infty\rangle$$

$$x = (x-6)^2 \rightarrow \ x^2 - 13x + 36 = 0 \ \rightarrow (x-9)(x-4) = 0 \ \rightarrow cs = \{4,9\}$$

$$S = U \cap cs = [6, \infty\rangle \cap \{4,9\} = \{9\} \qquad \therefore S = \{9\}$$

Se utilizó el método tradicional (Larry Mendoza, 2011), el cual nos arrojó dos soluciones: $x_1 = 9$ y $x_2 = 4$, pero al realizar la comprobación, solo una de estas soluciones ($x_1 = 9$) satisface la ecuación original y la otra ($x_2 = 4$) no satisface la ecuación original, la cual constituye una "Solución Extraña"

Se utilizó el método basado en el teorem a: $\sqrt{a} = b \leftrightarrow b \geq 0 \wedge a = b^2$, el cual está diseñado para tratar este tipo de ecuaciones, obteniéndose el universo de posibles soluciones $U = [6, \infty\rangle$, el cual al ser interceptado con el conjunto solución $cs = \{4,9\}$ de la ecuación, arrojo como solución única a $x_1 = 9$, donde ya no es necesario una comprobación en la ecuación original.

Resolver la ecuación: $\sqrt{2x+1} = 1 - x$

Sol.

Método o Forma tradicional

$$\left(\sqrt{2x+1}\right)^2 = (1-x)^2$$

$$2x + 1 = 1 - 2x + x^2$$

$$x^2 - 4x = 0 \ \rightarrow x(x-4) = 0 \ \rightarrow \ x_1 = 0 \ y \ x_2 = 4$$

Comprobación:

$$x_1 = 0 \ \rightarrow \sqrt{2(0)+1} = 1 - 0 \ \rightarrow 1 = 1 \qquad \therefore x_1 = 0 \ \textit{es solución}$$

$$x_2 = 4 \ \rightarrow \sqrt{2(4)+1} = 1 - 4 \ \rightarrow 3 = -3 \ (\textit{absurdo}) \qquad \therefore x_2 = 4 \ \textit{no es solución}$$

Método basado en el teorema: $\sqrt{a} = b \leftrightarrow b \geq 0 \wedge a = b^2$

$$\sqrt{2x+1} = 1 - x \quad \rightarrow 1 - x \geq 0 \ \wedge \ 2x + 1 = (1-x)^2$$

$$1 - x \geq 0 \ \rightarrow \ x \leq 1 \ \rightarrow U = \langle \infty, 1]$$

$$2x + 1 = (1-x)^2 \ \rightarrow x^2 - 4x = 0 \ \rightarrow x(x-4) = 0 \ \rightarrow \ x_1 = 0 \ y \ x_2 = 4$$

$$\rightarrow cs = \{0,4\}$$

$$S = U \cap cs = \langle \infty, 1] \cap \{0,4\} = \{0\} \qquad \therefore S = \{0\}$$

Se utilizó el método tradicional (elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación), el cual nos arrojó dos soluciones: $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$, pero al realizar la comprobación, solo una de ellas ($x_1 = 0$) satisface la ecuación original y la otra ($x_2 = 4$) no satisface la ecuación original, la cual constituye una "Solución Extraña".

Se utilizó el método basado en el teorema: $\sqrt{a} = b \leftrightarrow b \geq 0 \wedge a = b^2$, el cual está diseñado para tratar este tipo de ecuaciones, obteniéndose el universo de posibles soluciones $U = \langle -\infty, 1]$, el cual al ser interceptado con el conjunto solución $cs = \{0,4\}$ de la ecuación, arrojo como solución única a $x_1 = 0$, donde ya no es necesario una comprobación en la ecuación original.

Horizonte de la Ciencia 12 (22) ene-jun 2022 FE/UNCP. ISSN (En Línea): 2413-936X
Vaca R. Soluciones Extrañas en Ecuaciones con Radicales de Índice 2. 263-270

Resolver la ecuación: $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{x^2-1}=\sqrt{2x^2+x-1}$

Sol.

Método o Forma tradicional

$$\left(\sqrt{4x^2+9x+5}\right)^2=\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x^2+x-1}\right)^2$$
$$4x^2+9x+5=x^2-1+2x^2+x-1+2\sqrt{(x^2-1)(2x^2+x-1)}$$
$$x^2+8x+7=2\sqrt{(x^2-1)(2x^2+x-1)}$$
$$(x^2+8x+7)^2=\left(2\sqrt{(x^2-1)(2x^2+x-1)}\right)^2$$
$$x^4+64x^2+49+16x^3+14x^2+112x=4(x^2-1)(2x^2+x-1)$$
$$x^4+64x^2+49+16x^3+14x^2+112x=4(2x^4+x^3-x^2-2x^2-x+1)$$
$$7x^4-12x^3-90x^2-116x-45=0$$
$$(x+1)(x+1)(7x+9)(x-5)=0 \quad \rightarrow x_1=-1, \quad x_2={}^{-9}/_{7} \quad y \quad x_3=5$$

Comprobación:

$$x_1=-1 \rightarrow \sqrt{4(-1)^2+9(-1)+5}-\sqrt{(-1)^2-1}=\sqrt{2(-1)^2+(-1)-1}$$
$$\rightarrow \sqrt{4-9+5}-\sqrt{1-1}=\sqrt{2-1-1} \rightarrow 0=0 \quad \therefore x_1=-1 \ \textit{es solución}$$
$$x_2={}^{-9}/_{7} \rightarrow \sqrt{4\left(\frac{-9}{7}\right)^2+9\left(\frac{-9}{7}\right)+5}-\sqrt{\left(\frac{-9}{7}\right)^2-1}=\sqrt{2\left(\frac{-9}{7}\right)^2+\left(\frac{-9}{7}\right)-1}$$
$$\rightarrow \sqrt{\frac{324}{49}-\frac{81}{7}+5}-\sqrt{\frac{81}{49}-1}=\sqrt{\frac{162}{49}-\frac{9}{7}-1} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{49}}-\sqrt{\frac{32}{49}}=\sqrt{\frac{50}{49}}$$
$$\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{7}-\frac{\sqrt{32}}{7}=\frac{\sqrt{50}}{7} \rightarrow -3\sqrt{2}\neq 5\sqrt{2}(absurdo) \ \therefore x_2={}^{-9}/_{7} \ \textit{no es solución}$$
$$x_3=5 \rightarrow \sqrt{4(5)^2+9(5)+5}-\sqrt{(5)^2-1}=\sqrt{2(5)^2+(5)-1}$$
$$\rightarrow \sqrt{100+45+5}-\sqrt{25-1}=\sqrt{50+5-1} \rightarrow 3\sqrt{6}=3\sqrt{6} \quad \therefore x_3=5 \ \textit{es solución}$$

Método basado en el teorema: $\sqrt{a}=b \leftrightarrow b\geq 0 \ \wedge \ a=b^2$

$$\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{x^2-1}=\sqrt{2x^2+x-1}$$
$$4x^2+9x+5\geq 0 \rightarrow (4x+5)(x+1)\geq 0 \rightarrow U_1=\left\langle -\infty,\frac{-5}{4}\right]\cup[-1,\infty\rangle$$
$$x^2-1\geq 0 \rightarrow (x-1)(x+1)\geq 0 \rightarrow U_2=\langle -\infty,-1]\cup[1,\infty\rangle$$
$$2x^2+x-1\geq 0 \rightarrow (x+1)(2x-1)\geq 0 \rightarrow U_3=\langle -\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{2},\infty\right\rangle$$
$$\rightarrow \quad U=U_1\cap U_2\cap U_3=\left\langle -\infty,\frac{-5}{4}\right]\cup[1,\infty\rangle\cup\{-1\}$$
$$\left(\sqrt{4x^2+9x+5}\right)^2=\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x^2+x-1}\right)^2$$
$$4x^2+9x+5=x^2-1+2x^2+x-1+2\sqrt{(x^2-1)(2x^2+x-1)}$$

$$\sqrt{(x^2-1)(2x^2+x-1)}=\frac{x^2+8x+7}{2}$$

$$\frac{x^2+8x+7}{2}\geq 0\ \rightarrow (x+7)(x+1)\geq 0\ \ \rightarrow U_4=\langle -\infty,-7]\cup[-1,\infty\rangle$$

$$(x^2-1)(2x^2+x-1)=\left(\frac{x^2+8x+7}{2}\right)^2$$

$$4(2x^4+x^3-x^2-2x^2-x+1)=x^4+64x^2+49+16x^3+14x^2+112x$$

$$7x^4-12x^3-90x^2-116x-45=0$$

$$(x+1)(x+1)(7x+9)(x-5)=0\ \ \rightarrow cs=\left\{-1;\ {}^{-9}\!/_{7}\,;5\right\}$$

$$S=U\cap U_4\cap cs=\{-1;\ 5\}\qquad \therefore S=\{-1;5\}$$

Se utilizó el método tradicional (elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación), el cual nos arrojó tres soluciones: $x_1 = -1$, $x_2 = -9/7$ *y* $x_3 = 5$, pero al realizar la comprobación, solo dos de estas soluciones ($x_1 = -1$, $x_3 = 5$) satisfacen la ecuación original y la otra ($x_2 = -9/7$) no satisface la ecuación original, la cual constituye una "Solución Extraña".

Se utilizó el método basado en el teorema: $\sqrt{a}=b\ \leftrightarrow b\geq 0\ \wedge\ a=b^2$, el cual está diseñado para tratar este tipo de ecuaciones, obteniéndose el universo de posibles soluciones $U=\left\langle -\infty,{}^{-5}\!/_{4}\right]\cup[1,\infty]\cup\{-1\}$ y el universo particular $U_4=\langle -\infty,-7]\cup[1,\infty\rangle$, los cuales al ser interceptados con el conjunto solución $cs=\left\{-1;{}^{-9}\!/_{7};5\right\}$ de la ecuación, arrojo como soluciones a $x_1 = -1$, $x_2 = 5$, donde ya no es necesario una comprobación en la ecuación original.

Para resolver la ecuación irracional: $\sqrt[4]{x^2-5}\cdot\sqrt[4]{6x^2+10}=4$

Se utilizó el método basado en el teorema: $\sqrt{a}=b\ \leftrightarrow b\geq 0\ \wedge\ a=b^2$, el cual está diseñado para tratar este tipo de ecuaciones, obteniéndose el universo de posibles soluciones $U=\left\langle -\infty,-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5},\infty\right\rangle$, el cual al ser interceptado con el conjunto solución $cs=\{3,-3\}$ de la ecuación, arrojo como soluciones de la ecuación a $x_1 = 3$ y $x_1 = -3$, donde ya no es necesario una comprobación en la ecuación original.

Para resolver la ecuación irracional: $\sqrt{2x-\sqrt{x-4}}-\sqrt{x+4}=0$

Se utilizó el método basado en el teorema: $\sqrt{a}=b\ \leftrightarrow b\geq 0\ \wedge\ a=b^2$, el cual está diseñado para tratar este tipo de ecuaciones, obteniéndose el universo de posibles soluciones $U=\left[4,\infty\right\rangle$, el cual al ser interceptado con el conjunto solución $cs=\{4,5\}$ de la ecuación, arrojo como soluciones de la ecuación a $x_1 = 4$ y $x_1 = 5$, donde ya no es necesario una comprobación en la ecuación original.

Para resolver la ecuación irracional: $\sqrt{4x-3}=\dfrac{(3x-1)}{\sqrt{3x-5}}$

Se utilizó el método basado en el teorema: $\sqrt{a}=b\ \leftrightarrow b\geq 0\ \wedge\ a=b^2$, el cual está diseñado para tratar este tipo de ecuaciones, obteniéndose el universo de posibles soluciones $U=\left\langle 5/3,\infty\right\rangle$, el cual al ser interceptado con el conjunto solución $cs=\left\{7,\dfrac{2}{3}\right\}$ de la ecuación, arrojo como solución de la ecuación a $x_1 = 7$, donde ya no es necesario una comprobación en la ecuación original.

Para resolver la ecuación irracional: $\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}-1=0$

Se utilizó el método basado en el teorema: $\sqrt{a}=b \leftrightarrow b\geq 0 \wedge a=b^2$, el cual está diseñado para tratar este tipo de ecuaciones, obteniéndose el universo de posibles soluciones $U=\left[\frac{1}{2},\infty\right\rangle$, el cual al ser interceptado con el conjunto solución $cs=\{0,8\}$ de la ecuación, arrojo como solución de la ecuación a $x_1=8$, donde ya no es necesario una comprobación en la ecuación original.

Para resolver la ecuación irracional: $\sqrt{x^2-2x-1}+5=\dfrac{14}{\sqrt{x^2-2x-1}}$

Se utilizó el método basado en el teorema: $\sqrt{a}=b \leftrightarrow b\geq 0 \wedge a=b^2$, el cual está diseñado para tratar este tipo de ecuaciones, obteniéndose el universo de posibles soluciones $U=[-3,5]$, el cual al ser interceptado con el conjunto solución $cs=\left\{1\pm\sqrt{51},\ 1\pm\sqrt{6}\right\}$ de la ecuación, arrojo como soluciones de la ecuación a $x_1=1+\sqrt{6}$ y $x_2=1-\sqrt{6}$, donde ya no es necesario una comprobación en la ecuación original.

Se estudiaron además las ecuaciones: $\sqrt{x^2-21x+90}-\sqrt{x^2+3x-54}=x-6$ y la ecuación: $4.5-\sqrt{2x+1}=3x$, que al ser resueltas usando el teorema, arrojaron como soluciones, $x=6$ y $x=\dfrac{29-\sqrt{148}}{18}$ respectivamente, no teniendo la necesidad de realizar alguna comprobación en la ecuación original, más aun si observamos que la comprobación de: $x=\dfrac{29-\sqrt{148}}{18}$ en $4.5-\sqrt{2x+1}=3x$ se hace más complicada que su resolución.

Resultados

El método o Forma tradicional (elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación) como especifica Antonyan N. (2001) "…Estas operaciones incluyen…elevar ambos miembros a la misma potencia. Las soluciones obtenidas al final de tales procedimientos deben verificarse sustituyéndolas en la ecuación dada, para rechazar aquellas que realmente no lo son" es un método que conlleva a la comprobación (verificación) de las soluciones en la ecuación original, para determinar cuáles de ellas son "Soluciones Extrañas" y cuáles de ellas son las soluciones de la ecuación; como dice Larry Mendoza (2012) "…en algunos casos la verificación es más complicada que la misma resolución".

El uso del teorema: $\sqrt{a}=b \leftrightarrow b\geq 0 \wedge a=b^2$ en todos los tipos de ecuaciones irracionales de índice 2, que tienen la forma del teorema, nos lleva a determinar un universo dentro del cual deben estar las soluciones de la ecuación, eliminando aquellas que no lo están y por lo tanto, no permite la aparición de soluciones extrañas; eliminando además la necesidad de comprobación de las soluciones, en la ecuación original, la cual en muchos casos es más complicada que la misma resolución.

Discusión

Todo esto, significa, que el uso del teorema: $\sqrt{a} = b \leftrightarrow b \geq 0 \;\wedge\; a = b^2$, es el método correcto de resolver ecuaciones con radicales de índice 2, siempre y cuando dichas ecuaciones se ajusten al modelo del teorema, además de que ya no existe la necesidad de comprobación de las soluciones en la ecuación original, la cual en muchos casos es más complicada que la misma resolución. Es por tanto necesario el uso de los teoremas de acuerdo a cada tipo de ecuación con radicales de índice 2, ya que los resultados obtenidos nos dan a conocer que el método o Forma tradicional, posiblemente usado en virtud de la transposición didáctica, es un método incorrecto para solucionar este tipo de ecuaciones y en consecuencia difundir el uso de los teoremas establecidos para cada tipo de ecuación con el fin de descartar los métodos incorrectos que no se ajustan a los principios establecidos por el álgebra.

Referencias

Antonyan N.,Medina Herrera L, & Wisniewski, P. (2001). Problemario de Precálculo. Editorial Thomson

Chevallard, Y. (1998). *La Transposición Didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado.* AIQUE Grupo Editor.

Vidal Cortés, R. A. (Noviembre de 2009). Las Raíces y Radicales en Libros de Texto en Chile (1969 – 2009). *Un análisis de rupturas epistemológicas como aporte a la Didáctica de las matemáticas. Tesis doctoral presentada a la Facultad de Ciencias de la Educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile*. Santiago, Chile.

Mendoza, L., Vasquez Rivas, J., & Colina, F. (2012). *Soluciones Espurias o Extrañas y como Determinarlas en el Proceso de Problemas de Ecuaciones Irracionales de Indice N=2.* Obtenido de Researchgate.net: https://www.researchgate.net/publication/313843538

Mendoza, L., Vásquez, J. L., Colina, F., & Plasencia, M. S. (2011). *Determinación de Soluciones Espurias para Ecuaciones Irracionales.* Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/260715029

Pérez, N., Mellincovsky, D., Barrozo, M., Páez, H., & Pekolj, M. (05 de 12 de 2012). *Técnica y Tecnología, Reflexiones en torno a Ecuaciones e Inecuaciones.* Obtenido de https://www.yumpu.com/es/document/view/15486023/1-tecnica-y-tecnologia-reflexiones-entorno-a-famaf